Applicat linéair

Slide 2

$$f : E \longrightarrow F \qquad E \text{ et } F \text{ 2 } \underline{\underline{EVR}}$$
$$u \longrightarrow f(u)$$

$f(u+v) = f(u) + f(v)$. $\forall u \in E, \forall v \in E$

$f(\lambda u) = \lambda f(u)$ $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Slide 3

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
$$x \longrightarrow f(x) = ax.$$

$\mathbb{R}$ est — EVR $\exists z \in \mathbb{R}$

* $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}$. $z = x+y$

$$f(x+y) = f(z) = az = a(x+y) = ax + ay$$
$$= f(x) + f(y)$$

* $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ est - EVR

$\exists z = \lambda x$.

$$f(\lambda x) = f(z) = a \cdot z = a \cdot (\lambda x) = (a\lambda) x = (\lambda a) x$$
$$= \lambda . (ax)$$
$$= \lambda f(x)$$

donc on a

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) \end{cases} \Rightarrow f \text{ est } \underline{\underline{AL}}$$

$\cancel{g} : E \longrightarrow F$

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = ax + by$.

$\forall u \in \mathbb{R}^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ st-EVR.

$u = (x,y) \qquad v = (x',y') \qquad w = u+v$.

$w = u + v = (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$

$= (x'', y'') \qquad / \; x'' = x + x'$
$\qquad\qquad\qquad\quad y'' = y + y'$

$f(u+v) = f(w) = f(x'', y'')$.

$f(x'', y'') = ax'' + by'' = a(x+x') + b(y+y')$.

$= ax + ax' + by + by'$

$= ax + by + ax' + by'$

$= f(x,y) + f(x',y')$

$= f(u) + f(v)$.

$\boxed{f(u+v) = f(u) + f(v)}$

$\forall u \in \mathbb{R}^2$. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. $\quad \mathbb{R}^2$ st-EVR
$\qquad w = \lambda u \in \mathbb{R}^2$

$u = (x,y)$

$w = \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y) = (x', y')$, $\; x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$

$f(\lambda u) = f(w) = f(x',y') = ax' + by'$

$= a(\lambda x) + b(\lambda y)$

$= (a\lambda)x + (b\lambda)y$

$= (\lambda a)x + (\lambda b)y$

$= \lambda ax + \lambda(by)$

$= \lambda(ax+by) = \lambda f(x,y)$

$\Rightarrow f(\lambda u) = \lambda f(u)$

$\not{R}t$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = ax + by$$

f est une AL.

$(a,b)+(c+d) = (a+c, b+d)$
$\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$

Slide 4

~~R~~ =

$$f : E \longrightarrow F$$
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$
$$u \longrightarrow f(u)$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = (2x+3y, x-y)$$

$\forall u \in \mathbb{R}^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{R}^2$ est EVR

$\exists\, w = u + v \cdot \; w \in \mathbb{R}^2.$

$u = (x,y) \quad v = (x',y')$

$w = (x, y) + (x',y') = (x+x', y+y') = (x'', y'')$

$$f(u+v) = f(w) = f(x'',y'') = (2x''+3y'', x''-y'')$$
$$= (2(x+x') + 3(y+y'), (x+x') - (y+y'))$$
$$= (2x + 2x' + 3y + 3y', x + x' - y - y')$$
$$= ((2x + 3y) + (2x' + 3y'), (x-y) + (x'-y'))$$
$$= (2x+3y, x-y) + (2x'+3y', x'-y')$$
$$= f(x,y) + f(x',y')$$
$$= f(u) + f(v).$$

8

$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \exists w \in \mathbb{R}^2$ (EVR)

$w = \lambda u.$

$u = (x, y)$

$w = \lambda u = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) = (x', y')$

$$f(\lambda u) = f(w) = f(x', y') = (2x' + 3y', x' - y')$$
$$= (2\lambda x + 3\lambda y, \lambda x - \lambda y)$$
$$= (\lambda(2x + 3y), \lambda(x - y))$$
$$= \lambda(2x + 3y, x - y)$$
$$= \lambda f(x, y)$$
$$= \lambda f(u).$$

f M dre a loi – A2.

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \longrightarrow f(x, y, z) = (x + y + z, y).$$

$\forall u \in \mathbb{R}^3, \quad \forall v \in \mathbb{R}^3 \qquad \mathbb{R}^3$ 81 – EVR

$w = u + v.$

$u = (x, y, z) \quad v = (x', y', z')$

$$w = u + v = (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$
$$= (x'', y'', z'')$$

$$f(u + v) = f(w) = f(x'', y'', z'') = (x'' + y'' + z'', y'')$$

$f(u+v) = (x+x'+y+y'+z+z', y+y')$

$= ((x+y+z)+(x'+y'+z'), y+y')$

$= (x+y+z, y) + (x'+y'+z', y')$

$= f(x,y,z) + f(x',y',z')$

$= f(u) + f(v)$

* $\forall u \in \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{R}^3$ s.-EVR

$w = \lambda u$.

$u = (x,y,z)$

$w = \lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (x', y', z')$.

$f(\lambda u) = f(w) = f(x',y',z') = (x'+y'+z', y')$

$= (\lambda x + \lambda y + \lambda z, \lambda y)$

$= (\lambda(x+y+z), \lambda y)$

$= \lambda (x+y+z, y)$

$= \lambda f(x,y,z)$

$= \lambda f(u)$

Slide 5

$f : E \longrightarrow F$

$u \longrightarrow f(u)$.

f est AL $\Rightarrow f(0_E) = 0_F$

$\not\Leftarrow$

→ ex. 1

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = (x+y+z, y).$$

$0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0).$

$0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$

$f(0_{\mathbb{R}^3}) = f(0,0,0) = (0+0+0, 0) = (0,0) = 0_{\mathbb{R}^2}$

on a montré f est linéaire.

→ ex 2

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = (x+y, y+1, z)$$

$\cdot f(0_{\mathbb{R}^3}) = f(0,0,0) = (0+0, 0+1, 0) = (0,1,0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}.$

f n'est pas linéai. en effet.

$u = (x,y,z)$ $\quad v = (x', y', z')$ $\quad w = u+v) = (x'', y'', z'')$

$x'' = x+x', y'' = y+y', z'' = z+z'$

$f(u+v) = f(w) = f(x'', y'', z'') = (x''+y'', y''+1, z'')$

$= (x+x'+y+y', y+y'+1, z+z')$

$= ((x+y) + (x'+y'), (y+1) + (y'+1) - 1, z+z')$

$= (x+y, y+1, z) + (x'+y', y'+1, z') + (0, -1, 0).$

$= f(x,y,z) + f(x', y', z') + (0, -1, 0)$

~~f(u+v)~~ $f(u+v) = f(u) + f(v) - (0,1,0)$

$\neq f(u) + f(v)$ $\quad$ f n'est pas AL

→ ex 3.

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = x \cdot y.$

$O_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \qquad O_{\mathbb{R}} = 0$

$f(O_{\mathbb{R}^2}) = f(0,0) = 0 \cdot 0 = 0 = O_{\mathbb{R}}.$

$f(O_{\mathbb{R}^2}) = O_{\mathbb{R}}$

~~peut on~~ peut on dire si f est AL.

$\forall u \in \mathbb{R}^2 \qquad u = (x,y).$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$w = \lambda u = \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$
$= (x', y')$

$f(\lambda u) = f(w) = f(x', y') = x' \cdot y' = (\lambda x)(\lambda y).$
$= \lambda^2 x y.$

$\Rightarrow f(\lambda u) = \lambda^2 x \cdot y = \lambda^2 f(x,y) = \lambda^2 f(u)$
$= \lambda^2 f(u) \neq$
$\neq \lambda f(u) \qquad \forall \lambda$

$\Rightarrow$ f n'est pas AL.

Slide 9

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longrightarrow f(u)$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = ?$$

Soit $\{e_1, e_2\}$ — base de $\mathbb{R}^2$ $\quad e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$

on a $\begin{cases} f(e_1) = f(1,0) = 3 \\ f(e_2) = f(0,1) = 2. \end{cases}$

Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1)$
$$= x e_1 + y e_2$$

$$f(x,y) = f(x e_1 + y e_2) = f(x e_1) + f(y e_2)$$
$$= x f(e_1) + y f(e_2)$$
$$= x \cdot 3 + y \cdot 2$$

$$\boxed{f(x,y) = 3x + 2y}$$

Slide 10

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$$h = g \circ f.$$

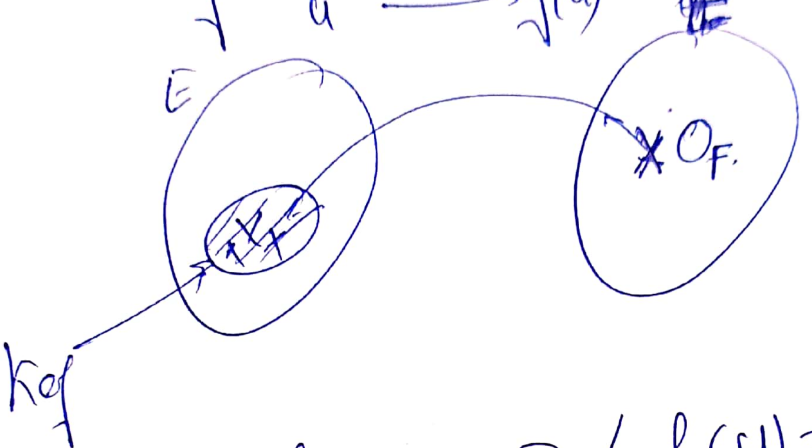
$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G.$$

$$u \longrightarrow v = f(u) \longrightarrow X = g(v) = g[f(u)]$$

$$X = g(v) = g[f(u)] = (g \circ f)(v).$$

Slide 11

$$f : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ u \longrightarrow f(u) \end{array}$$



$$\mathrm{Ker} f = \{ u \in E \,/\, f(u) = 0_F \}$$

Slide 12

Ker f st - SEVR

f - AL. $\Rightarrow f(0_E) = 0_F. \Rightarrow 0_E \in \mathrm{Ker} f$

$\Rightarrow$ Ker f n'st pas vide.

$\forall u \in \mathrm{Ker} f \quad f(u) = 0_F$

$\forall v \in \mathrm{Ker} f \quad f(v) = 0_F.$

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$

$f(\lambda u + \beta v) = \lambda f(u) + \beta f(v) = \lambda . 0_E + \beta 0_F . = 0_F.$

$\Rightarrow f(\lambda u + \beta v) = 0_F \quad \Rightarrow \lambda u + \beta v \in \mathrm{Ker} f$

Slid 13

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = (x+y, x+y)$

$\ker f = ?$ $\quad f(x,y) = 0_F = 0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$
$u \in \ker f$ $\quad u = (x,y)$
$f(x,y) = (x+y, x+y) = (0,0) \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow$

$y = -x$

si $(x,y) \in \ker f \Rightarrow (x,y) = (x,-x) = x(1,-1)$.
$(x,y) = x \cdot (1,-1)$.
$\Rightarrow \boxed{\ker f = \langle (1,-1) \rangle}$

Slid 14

$f \quad \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$u = (x,y,z,t) \longrightarrow f(u) = f(x,y,z,t)$
$f(x,y,z,t) = (x-y+2t, x+y+z+3t)$.

$u \in \ker f \quad f(u) = 0_{\mathbb{R}^2}$.
$\Rightarrow f(x,y,z,t) = (x-y+2t, x+y+z+3t) = (0,0)$.

$\Rightarrow \begin{cases} x-y+2t = 0 \\ x+y+z+3t = 0. \end{cases}$

On a 2 équations et 4 inconnues.

On va ramener le syst à un syst de 2 équat et 2 ~~inconnues~~ inconnues, cad on doit choisir les 2 autres comme paramètres. On a pour cela C_4^2 choix possibles (soit 6)

1ᵉ choix y, z inconnues x et t paramètres

$$\begin{cases} y = x + 2t \\ y + z = -x - 3t \end{cases}$$

$\boxed{y = x + 2t}$ $\forall x, \forall t$

$\Rightarrow z = -x - 3t - y$

$z = -x - 3t - x - 2t$

$\Rightarrow \boxed{z = -2x - 5t}$ $\forall x, \forall t$

il s'en suit par $f(x, y, z, t) = 0_{\mathbb{R}^2}$ $\Rightarrow (x, y, z, t) = (x, x + 2t, -2x - 5t, t)$

$(x, y, z, t) = (x, x, -2x, 0) + (0, 2t, -5t, t)$.

$= x\underbrace{(1, 1, -2, 0)}_{U_1} + t\underbrace{(0, 2, -5, 1)}_{V_1}$ $\forall x, \forall t$

$\Rightarrow \ker f = \langle U_1, V_1 \rangle$

$$\boxed{\ker f = \langle (1, 1, -2, 0), (0, 2, -5, 1) \rangle}$$

on peut faire un autre choix.
x, z inconnus y et t paramètres

$$\begin{cases} x = y - 2t \\ x + z = -y - 3t \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{x = y - 2t} \quad \forall y, \forall t$

$\cancel{x+z} \Rightarrow z = -y - 3t - x$

$z = -y - 3t - y + 2t$

$\boxed{z = -2y - t} \quad \forall y, \forall t$

$f(x,y,z,t) = (0,0) \Rightarrow$

$(x,y,z,t) = (y - 2t, y, -2y - t, t)$

$(x,y,z,t) = (y, y, -2y, 0) + (-2t, 0, -t, t)$
$= y(1,1,-2,0) + t(-2,0,-1,1)$

$\Rightarrow \boxed{\ker f = \langle (1,1,-2,0), (-2,0,-1,1) \rangle}$

on trouve ici une autre réponse, qui est également juste et dépend du choix des paramètres,
il faut remarquer que le premier vecteur est le même alors que le 2e est différent.

~~Cordonnée~~ Puisqu'il s'agit du même $\ker f$
donc il faut que ce deuxième vec $(-2,0,-1,1)$ soit combinaison linéaire

Scanné avec CamScanner

dans valeurs $(1,1,-2,0)$ et $(0,2,-5,1)$ cad

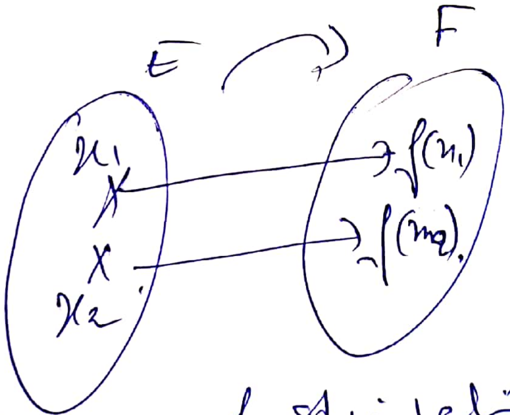
$$(-2,0,-1,1) = \alpha(1,1,-2,0)+\beta(0,2,-5,1)$$
$$= (\alpha,\alpha,-2\alpha,0)+(0,2\beta,-5\beta,\beta)$$
$$= (\alpha,\alpha+2\beta,-2\alpha-5\beta,\beta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 & \Rightarrow \boxed{\alpha=-2} \\ \alpha+2\beta=0 & \longrightarrow -2+2(1)=0 \\ -2\alpha-5\beta=-1 & \longrightarrow -2(-2)-5(1)=-1 \\ \boxed{\beta=1} & \Rightarrow \boxed{\beta=1}. \end{cases}$$

donc
$$\boxed{(-2,0,-1,1) = (0,2,-5,1) - 2(1,1,-2,0)}$$

<u>Slide 15</u>.

<u>Rappel</u>.



$f : E \longrightarrow F$ f injective <u>ssi</u>

$\forall x \in E \ \forall x' \in E \quad f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'$

m $\forall x \in E \ \forall x' \in E \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

* f st appli Lin $f(0_E)=0_F$.

$\forall u \in \operatorname{Ker} f$ $f(u)=0_F$.

$f(u)=f(0_E) \Longrightarrow u=0_E \Longrightarrow$

On a. $\boxed{f \text{ st injecti}}$

$\operatorname{Ker} f=\{0_E\}$

* On a $\operatorname{Ker} f=\{0_E\}$.

Si $f(u)=f(v) \Longrightarrow f(u)-f(v)=0_F \Longrightarrow$

f st AL

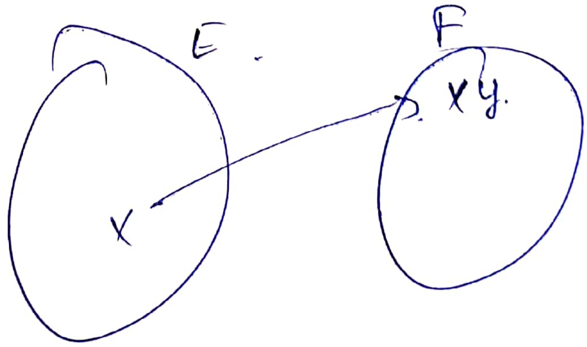
$f(u)-f(v)=f(u-v)=0_F \Longrightarrow$

$u-v=0_E \Longrightarrow u=v \Longrightarrow$

$\boxed{f \text{ st injective}}$

Slide 18

Rappel.



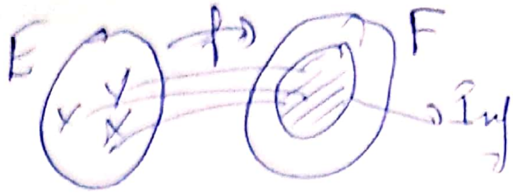
$f: E \longrightarrow F$

$x \longmapsto y=f(x)$

Une Appl est dite surjective ssi

$\forall y \in F \ \exists x \in E \ / \ y=f(x)$

Slide 18



* Imf n'est p vide.

f st A.L $f(0_E)=0_F$. $0_F \in Imf$.

* $\forall v_1 \in F$ $v_1 = f(u_1)$ $u_1 \in E$

$\forall v_2 \in F$ $v_2 = f(u_2)$ $u_2 \in E$

E est un EV. $\Rightarrow \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in E$ $\forall \lambda_1 \forall \lambda_2$ $\forall u_1 \forall u_2$

$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

or $f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \in Imf$

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in Imf$

donc Imf st SEV de F.

Slide 19

Pour p f soit surject il faut p

$Imf = F$.

* Depuis sa défin $Imf = \{v \in F / v = f(u), u \in E\}$. donc

$Imf \subset F$.

• f st surjecti $\Rightarrow \forall v \in F \; \exists u \in E / v = f(u)$.
$v \in Imf$.

$\Rightarrow F \subset Imf$.

$\mathrm{Im} f \subset F$ ⟹ $\mathrm{Im} f = F$
$F \subset \mathrm{Im} f$

Slide 20

$f : E \longrightarrow F$

f est bijective ssi $\begin{cases} f \text{ est injective} & \mathrm{Ker} f = \{0_E\} \\ \text{et} & \\ f \text{ est surjective} & \mathrm{Im} f = F \end{cases}$

Slide 21

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (x+y,\ y+x)$.

Nous avons vu $\mathrm{Ker} f = \langle (1,-1) \rangle$

Pour l'image de f : $\mathrm{Im} f = ?$

$\mathrm{Im} f = \{ v \in F \,/\, v = f(u) \quad u \in E \}$

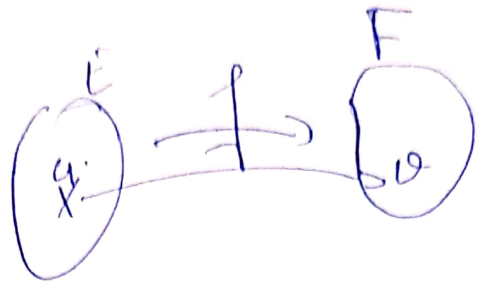
$f(x,y) = (x+y, x+y) = (x+y)(1,1)$.

$x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ ⟹ $\lambda = x+y \in \mathbb{R}$

$f(x,y) = (x+y)(1,1)$.

$\Rightarrow \mathrm{Im} f = \langle (1,1) \rangle$

Slide 22



E est un EVR, $\{e_1 \dots e_n\}$ Base de E.

F un EVR. et soit $\{f(e_1), \dots f(e_n)\}$ est la famille génératrice de

$\{e_1 \dots e_n\}$ de F.

le rang p est le nombre max de vecteurs

$f(e_i)$. indépendants

$$\alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) \dots + \alpha_p f(e_p) = 0_F$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \dots = \alpha_p \qquad \underline{p \leq n}$$

ex $f(x,y) = (x+y, x+y)$ $\qquad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$e_1 = (1,0) \qquad e_2 = (0,1)$

$f(e_1) = (1,1)$ $\qquad f(e_1) = f(e_2)$.

$f(e_2) = (1,1)$

le nombre de vecteurs indépendants est égal à 1

$\Rightarrow$ ~~dim~~ $rg(f) = 1$.

et nous avons $Im f = \{(1,1)\}$ dim $Im f = 1$

Slid 23

$f(x,y) = (x-y, x+y)$

$\text{di } Kerf = \langle(1,-1)\rangle$ $\quad$ di Kerf = 1

$Imf = \langle(1,1)\rangle$ $\quad$ di Imf = 1

di E = di $\mathbb{R}^2 = 2$

di Imf + di kerf = di E

$1 + 1 = 2.$

Slid 24

→ si f est injec $Kerf = \{O_E\}$ $\quad$ di Kerf = 0.

* rg(f) = di Imf = di E

→ Si f est surjetive $\quad$ di Imf = di F.

** rg(f) = di Imf = di F

→ Si f est bijetive. $\begin{cases} rg(f) = \text{di } E \\ rg(f) = \text{di } F \end{cases}$ $\quad$ injetive surjet

*** rg(f) = di E = di F